

NN Cephei: Etude de la courbe de lumière et détermination des éléments orbitaux.

RESUME. On a présenté dans cette étude l'analyse précise des observations de NN Cep effectuées par le GEOS de 1976 à 1978. On a utilisé 3518 mesures de 17 observateurs, italiens et français.

En utilisant les 22 minimums mis en évidence, on a calculé une nouvelle éphéméride, au demeurant pas très différente de la précédente publiée en GEOS NC 142 (et IBVS 1231). La voici:

$$\begin{aligned} \text{Min 1} &= \text{JJ h}^{\text{el.}} 24 \text{ } 43 \text{ } 288.870 + 2.058 \text{ } 07 \text{ } E \\ &\quad \pm 11 \quad \quad \quad \pm 13 \end{aligned}$$

On a ensuite effectué l'analyse harmonique de la courbe de lumière, obtenue en dehors des éclipses: la valeur du coefficient d'ellipticité est $z = 0.0249$.

En appliquant les méthodes habituelles, on a alors tracé la courbe de lumière rectifiée, base de départ pour le calcul des éléments orbitaux.

Comme il n'était pas possible d'opter avec certitude pour le cas de l'éclipse totale ou de l'éclipse partielle, on a considéré successivement ces deux hypothèses, et dans les deux cas on a appliqué la méthode itérative de Kopal. Tous les calculs ont été effectués sur TEXAS DX 980 B au moyen de programmes en FORTRAN IV écrits par l'auteur.

On a ainsi pu déterminer les valeurs des demi-grands axes des deux composantes, supposées elliptiques, et les valeurs de l'excentricité de l'orbite et de la longitude du périastre.

On a enfin effectué une étude complémentaire dans le but de déterminer le type du système NN Cep. Les résultats obtenus indiquent l'appartenance au type "détaché", c'est-à-dire celui pour lequel les deux composantes ne remplissent pas leur lobe de Roche.

Studio della curva di luce e determinazione degli elementi orbitali

di A. GASPANI

A) Notizie bibliografiche.

La stella HD 217796 (AR = $23^{\text{h}} 00^{\text{m}}.1$ DB = $+62^{\circ} 15'$) è attualmente registrata dal secondo supplemento del G.C.V.S. (1974) come variabile di tipo RR Lyrae caratterizzata da un periodo di 0.5 o 1 giorno.

Nel 1976 essa fu inclusa nel programma osservativo del G.E.O.S.- Sin dalle prime osservazioni risultò chiaramente che la natura della variabilità riscontrata mal si conciliava con il tipo indicato nel G.C.V.S.-

Infatti si registravano dei massimi di tipo abbastanza piatto e dei minimi profondi.

Dalla elaborazione delle misure raccolte risultò molto probabile che NN Cep fosse in realtà una variabile ad eclisse con periodo di $2^{\text{d}}.058$ cioè circa il doppio di quello indicato in bibliografia.

Ciò in sostanza è quanto riportato sulla NC 142 e sull'IBVS 1231 in cui è riportata la seguente effemeride:

$$\text{min. I (hel.)} = \text{JD}_0 2442959.57 + 2^{\text{d}}.058 * E$$

Successivamente le osservazioni sono state effettuate sistematicamente e tutt'ora sono ancora in corso.

Le caratteristiche di NN Cep sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{minimo I} &= 8.7 \text{ mag.} \\ \text{minimo II} &= 8.5 \text{ mag.} \\ \text{massimo} &= 8.2 \text{ mag.} \end{aligned}$$

Il tipo spettrale indicato è A5; da tener presente che probabilmente tale tipo spettrale è tipico solamente della componente che contribuisce maggiormente alla luminosità totale del sistema, mentre nulla a tutt'ora è conosciuto riguardo alla seconda componente.

B) Osservazioni.

La stella in oggetto è stata osservata utilizzando il metodo visuale di Argelander.

Le misure che hanno permesso di effettuare questo studio sono state 3518, ottenute da 17 osservatori (10 italiani e 7 francesi).

Il periodo osservativo coperto è stato quello che va dall'inizio del 1976 ai giorni nostri in cui la stella in esame appare ancora in programma ed è tutt'ora seguita.

La posizione di questa stella è quella indicata in figura 1, mentre le stelle di confronto sono le seguenti e presentano le seguenti caratteristiche:

	<u>nome</u>	<u>mag.</u>	<u>spettro</u>
A	USNOC 19710	7.40	BO IV
B	USNOC 19768	8.21	AO

Gli strumenti usati per l'osservazione sono stati di vario tipo ed essi sono indicati nella tabella I dove sono pure riportate le altre notizie relative ai vari osservatori e cioè: il nome, la sigla di identificazione, il luogo di osservazione, lo strumento utilizzato, il numero delle misure ottenute e la sequenza personale tipica di ciascun osservatore.

tab. I

Osservatore	sigla	località	str.	n° mis.	sequenza pers.		
					A	B	C
Benucci	BEN	FI	T 190	187	7.4	8.21	9.00
Buzzoni	BUZ	FE	L 40	48	7.4	8.21	9.00
Fumagalli	FUM	BG	J 50	37	7.4	8.21	9.00
Gaspani	GAS	BG	T 155	156	7.43	8.14	9.04
Penna	MPN	AT	T 114	215	7.4	8.21	9.04
NC 142 (ROL)		F	J 50	751			
NC 149 (FGR)		F	T 106	177			
Pampaloni	PMP	FI	T 200	142	7.41	8.18	9.01
Poretti	POI	MI	J 70	254	7.37	8.27	8.96
Ralincourt	RAL	F-BZH	L 76	598	7.70	8.15	9.00
Simonetti	SIM	PD	T 114	78	7.4	8.21	9.00
Troispoux	TRP	F-45	J 50	137	7.42	8.17	9.02
Wabnitz	WAB	ROMA	J 50	245	7.44	8.13	9.03
Letellier	LTL	F	FOTAGR.	188			
Franchini	FCH	MI	J 70/100	133			
Marot	MAR	F	J 50	51			
Rémis	RMS	F	J 50	39			

Logicamente da questi osservatori si sono ottenuti risultati leggermente diversi fra loro a causa degli inevitabili errori di osservazione.

Da tener presente che taluni osservatori avevano ottenuto il compositage completo delle osservazioni, altri invece avevano a disposizione solamente un certo numero di misure singole insufficienti per la costruzione del compositage individuale.

In fase di elaborazione dei dati raccolti è stato necessario tenere conto di tale fatto al fine di costruire una sola curva di luce di tutti gli osservatori eliminando tutte le disomogeneità presenti.

Si è proceduto quindi a riportare in un unico diagramma tutti i compositages a disposizione eseguendo successivamente una media pesata su tratti di $.015 * P$; i pesi utilizzati erano rappresentati dal numero di misure utilizzate da ciascun osservatore per costruire ciascun punto della propria curva di luce individuale, venendo così ad attribuire una maggior importanza ai punti ottenuti con un maggiore numero di misure.

Siccome i compositages dei vari osservatori presentavano ampiezze diverse, si è dovuto procedere ad una normalizzazione degli stessi al

fine di ottenere il compositage risultante da elaborare successivamente tramite il calcolatore elettronico.

Da tener presente che le differenze in ampiezza fra osservatore ed osservatore non erano molto marcate, mantenendosi in limiti accettabili, per cui il processo di normalizzazione è risultato di notevole attendibilità e precisione.

Al termine di tale processo venivano ottenuti 66 punti normali che, dopo la trasformazione delle magnitudini in intensità di luminosità, ci fornivano una prima curva di luce da utilizzare per il resto del lavoro.

Già a questo punto si notava che la curva ottenuta era abbastanza buona, ma prima di poterla utilizzare per la determinazione degli elementi orbitali è stato necessario procedere alla sua rettificazione utilizzando i ben noti metodi esistenti al fine di poter successivamente operare in accordo col modello classico Russelliano.

In questa fase appariva quindi necessario liberare la curva in esame da tutti gli effetti perturbatori dovuti alla ellitticità delle due stelle componenti il sistema binario e dalla riflessione della luce di una stella sulla faccia dell'altra rivolta verso il baricentro del sistema binario in esame.

C) Determinazione degli elementi temporali.

Dall'esame dei dati raccolti risultava chiaramente che era probabile che risultasse necessario rivedere gli elementi di luce riportati per questa stella nella GEOS NC 142 e nell'IBVS 1231 e indicati precedentemente.

Le osservazioni disponibili ci fornivano 22 determinazioni di minimo di buona attendibilità, rispettivamente 12 di minimo primario e 10 di minimo secondario effettuate da 7 osservatori.

Utilizzando gli istanti di minimo osservati ed assumendo in prima approssimazione che l'orbita di NN Cep sia circolare è stata ricavata tramite il metodo dei minimi quadrati una nuova effemeride che risponde in maniera più accurata alle osservazioni disponibili. Tale effemeride relativa al minimo principale è la seguente:

$$JD (hel.) = 2443288,870 + 2^d.05807 * E \\ \pm 11 \quad \pm 13$$

La tabella II riporta per ciascun minimo determinato l'osservatore, il tipo di minimo, l'istante di minimo osservato, le epoche e gli (O-C) relativi alle due effemeridi esaminate.

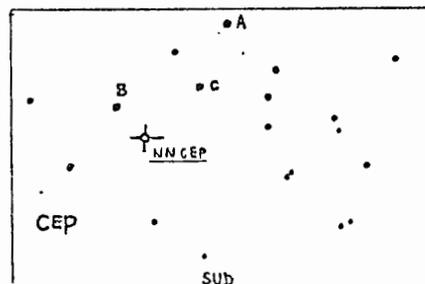


fig 1

tabella II

Osservatore	tipo del minimo	t _{obs} 2400000+	E	(O-C)	(O-C)'
ROL	II	42919.49	-19.5	+0.05	.043
ROL	I	42922.51	-18.0	-.02	-.024
ROL	II	42991.49	+15.5	+0.02	.011
ROL	I	42994.56	+17.0	0.00	-.007
FGR	I	43109.79	+73.0	-.014	-.029
BEN	II	43343.484	+186.5	+0.097	+0.074
POI	I	43406.216	+217.0	+0.060	+0.035
POI	II	43407.205	+217.5	+0.020	-.005
GAS	II	43409.263	+218.5	+0.020	-.005
GAS	II	43411.320	+219.5	+0.019	-.006
GAS	I	43412.350	+220.0	+0.020	-.005
GAS	I	43414.408	+221.0	+0.020	-.005
PMP	I	43515.241	+270.0	+0.011	-.018
PMP	II	43516.290	+270.5	+0.031	+0.002
MPN	I	43200.35	117	-.006	-.024
MPN	II	43906.37	168.5	+0.027	+0.006
MPN	I	43307.392	169	+0.020	-.001
MPN	II	43308.395	169.5	-.006	-.027
MPN	I	43342.391	186	-.007	+0.010
MPN	II	43343.385	186.5	-.002	-.025
MPN	I	43344.423	187	+0.007	-.016
MPN	I	43410.312	219	+0.040	+0.015

Nota: E ed (O-C) sono riferiti alla effemeride di ROL; mentre E' ed (O-C)' sono riferiti alla effemeride di GAS.

La nuova effemeride è quella utilizzata poi nel presente lavoro. Dall'esame degli (O-C) ottenuti da entrambe le effemeridi analizzate risulta che l'orbita di NN Cep non presenta traccia apprezzabile di eccentricità.

D) Rettificazione della curva di luce.

Nella sezione B del presente lavoro era stato descritto il metodo seguito per costruire la curva di luce, tale curva di luce è stata successivamente rettificata con i metodi qui presentati.

Le normali ottenute e relative alle fasi di "fuori eclisse" sono state rappresentate con uno sviluppo in serie di Fourier del tipo:

$$l_{obs} = A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta \right\} \quad (1) \quad n=2$$

comprendente come si vede, anche i termini in sin in quanto era stata notata una certa asimmetria della curva in esame.

Per questa analisi sono stati utilizzati i punti normali presenti tra le fasi $\varphi = .12$, $\varphi = .38$ e $\varphi = .62$, $\varphi = .88$ utilizzando in definitiva 32 punti. I vari termini A_k e B_k sono stati ottenuti risolvendo con il metodo dei minimi quadrati un sistema di 32 equazioni del tipo della (1) ottenendo per i coefficienti i seguenti valori:

$$\begin{aligned} A_0 &= .9997 \pm .0053 & B_1 &= .00755 \pm .000648 \\ A_1 &= -.00059 \pm .00021 & B_2 &= -.00257 \pm .00048 \\ A_2 &= -.00514 \pm .00086 \end{aligned}$$

che ci forniscono gli elementi fondamentali per la rettificazione della curva di luce.

Tale rettificazione è stata eseguita seguendo i seguenti criteri:

a) Rettificazione per le perturbazioni.

Questo processo si incarica di eliminare le asimmetrie presenti nella curva di luce osservata e derivanti dalla esistenza dei termini in seno dell'angolo di fase.

Queste asimmetrie sono state registrate peraltro solamente nelle fasi di 'fuori eclisse' e durante il minimo secondario per cui appare ragionevole ammettere, almeno in prima approssimazione che esse derivino dalla influenza della componente non eclissata in tale minimo. In conseguenza di questo fatto la rettificazione per perturbazioni è stata effettuata sottraendo alla luminosità osservata la quantità Δ^{PR} ottenuta come segue:

$$\Delta^{PR} = (1 - f_1) \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin k\theta \quad n=2 \quad (2)$$

dove f_1 rappresenta la frazione della luce della stella eclissata al minimo principale oscurata ad una certa fase della eclisse considerata.

b) Rettificazione per riflessione.

Tale rettificazione assume generalmente la forma di un termine additivo del tipo:

$$\Delta^{RIF} = C_0 + \sum_{i=1}^{i=n} C_i \cos(i\theta) \quad n=2 \quad (3)$$

dove i termini C_i sono stati ottenuti con i noti metodi indicati da Russell e Merrill. I loro valori sono:

$$\begin{cases} C_2 = .0107952 \\ C_1 = .0005921 \\ C_0 = .0323831 \end{cases}$$

c) Rettificazione per ellitticità

Essa assume sempre la forma:

$$\Delta^{ell} = 1 + C_0 + \left(\frac{A_1}{A_0} + C_2 \right) \cos 2\theta \quad (4)$$

L'applicazione di tale correzione avviene dividendo ogni luminosità osservata per Δ^{ell} .

E' stato anche rettificato il valore dell'angolo di fase utilizzando la ben nota relazione:

$$\theta_{ret} = \arcsin \left(\frac{\sin^2 \theta}{1 - z \cos^2 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

dove θ rappresenta la fase angolare osservata e θ_{ret} quella rettificata. Il valore del coefficiente di ellitticità z ottenuto è risultato essere

$$z = .0249$$

A questo punto applicando le correzioni fin qui descritte ad ogni punto normale si sono ottenuti i nuovi punti normali che hanno permesso di definire con maggior precisione la curva di luce di NN Cep. Tale curva è stata quindi utilizzata per ottenere una soluzione preliminare che permettesse di migliorare i valori dei coefficienti C_i di rettifica.

I nuovi valori delle costanti C_i ottenuti non differiscono in maniera apprezzabile da quelli precedentemente indicati per cui si è autorizzati ad assumere come curva utilizzabile per la derivazione degli elementi orbitali quella precedentemente ottenuta in quanto la nuova non presenta differenze rispetto a quella, almeno tenendo conto della incertezza dovuta agli errori di osservazione.

Tutto il processo di rettificazione fin qui descritto è stato effettuato utilizzando i programmi BOOTES e BYNARY in linguaggio FORTRAN IV, compilati dallo scrivente ed utilizzando un calcolatore TEXAS DX 980; il tempo macchina complessivamente richiesto è stato di circa 4 minuti.

La curva di luce rettificata è riportata nella figura 2, mentre la tabella III riporta le normali rettificate per entrambi i minimi, la tabella IV riporta invece le normali rettificate relative alle fasi di "fuori eclisse".

tabella III

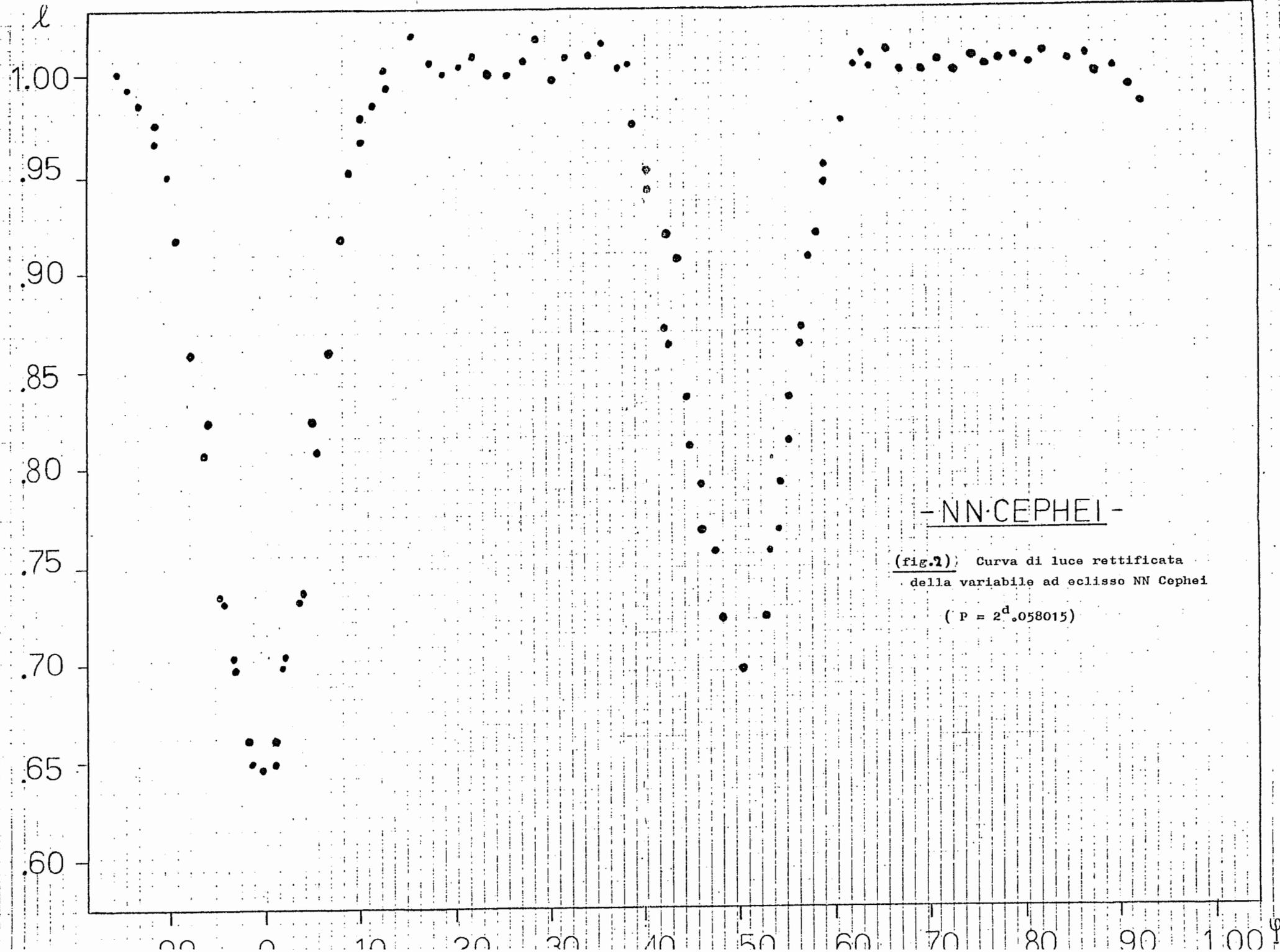
minimo I		minimo II	
<u>fase rettific.</u>	<u>luminos.</u>	<u>fase rettif.</u>	<u>luminos.</u>
.0000	.6437	.5081	.6945
.0102	.6448	.5152	.7207
.0122	.6588	.5203	.7549
.0203	.6860	.5294	.7639
.0254	.6920	.5305	.7852
.0401	.7291	.5407	.8112
.0477	.7339	.5411	.8333
.0538	.8182	.5548	.8611
.0507	.8223	.5568	.8707
.0529	.8574	.5750	.9127
.0836	.9135	.5800	.9186
.0911	.9472	.5911	.9421
.1062	.9654	.5911	.9521
.1032	.9776	.6212	.9705
.1175	.9825	.6213	1.0015

Nota: i valori delle fasi e delle luminosità sono stati riflessi su una sola branca del minimo in esame e precisamente su quella ascendente.

tabella IV

<u>fase rett.</u>	<u>luminosità</u>	<u>fase rett.</u>	<u>luminosità</u>
.1332	.9926	.6312	1.0088
.1322	.9996	.6322	.9998
.1601	1.0167	.6611	1.0081
.1760	1.0008	.6710	.9956
.1908	.9921	.6918	.9947
.2096	.9964	.7126	.9979
.2204	1.0037	.7303	.9933
.2352	.9917	.7461	.9994
.2569	.9905	.7608	.9956
.2727	.9976	.7766	.9989
.2884	1.0117	.7914	1.0038
.3042	.9885	.8082	1.0023
.3151	1.0049	.8191	1.0093
.3399	1.0066	.8478	1.0053
.3588	1.0112	.8628	1.0083
.3738	.9992	.8868	.9953
.3838	1.0028	.8888	1.0003
.3888	.9710	.9089	.9923

E) Determinazione degli elementi orbitali.



- NN CEPHEI -

(fig. 2) Curva di luce rettificata della variabile ad eclisse NN Cephei

(P = 2^d.058015)

La curva di luce complessiva ottenuta con i metodi precedentemente descritti è stata utilizzata per la determinazione degli elementi orbitali del sistema binario.

A questo punto ci si è subito trovati di fronte a una difficoltà. Infatti, come abbiamo avuto occasione di notare, il periodo di variazione di NN Cep è di poco più di due giorni per cui i minimi presentavano delle durate notevoli; di conseguenza la variazione luminosa durante i minimi appare notevolmente lenta, per cui è di estrema difficoltà stabilire se questa stella presenta dei minimi piatti oppure dei minimi appuntiti.

La soluzione di tale problema appariva di notevole importanza in quanto tutto il lavoro successivo dipendeva dal fatto di aver optato per una ipotesi invece che per l'altra.

In effetti una certa fase di stabilità al minimo era stata notata da più osservatori però la variazione lenta della luminosità e la dispersione delle misure non avevano mai permesso di pronunciarsi con certezza sulla ipotesi da assumere.

Nelle figure 3 e 4 sono riportate alcune curve di luce costruite facendo il compositage delle osservazioni individuali relative a più minimi da parte di uno stesso osservatore, in maniera da non dover introdurre deformazioni dovute al processo di normalizzazione in ampiezza.

In fig. 3 appare la curva ottenuta dalle misure di RAL del 76-77 e i relativi punti normali calcolati con la relativa banda d'errore, mentre in fig. 4 viene mostrata allo stesso modo la curva ottenuta dalle misure di GAS nel novembre 1977. In figura 5 appare la curva sempre di GAS relativa ai minimi secondari seguiti.

D'altra parte altri osservatori avevano registrato discese appuntite per cui saggiamente si è deciso di analizzare entrambe le ipotesi ottenendo due soluzioni separate in maniera da poter fare un confronto fra gli elementi ottenuti nei due casi.

Da tener presente che nel caso di eclisse totale e anulare si dovrà ripetere la rettificazione per ellitticità e per riflessione essendo variate leggermente le costanti C_2 e C_0 .

Tale modifica però non ha portato a sostanziali modifiche nelle curve di luce per cui si è preferito non riportare la nuova ottenuta.

a) Caso di eclisse parziale.

Assumendo valida l'ipotesi che i minimi siano dovuti ad eclissi di tipo parziale, si è proceduto alla soluzione della curva di luce ottenuta dalle osservazioni previa rettificazione.

Per la determinazione degli elementi orbitali si sono seguite due strade indipendenti, cioè sono stati utilizzati: il metodo di Kopal e un metodo diretto di tipo iterativo.

Il metodo di Kopal presenta i vantaggi di richiedere per la sua applicazione un minor numero di informazioni rispetto ad altri metodi e di essere caratterizzato da una notevole precisione. Di contro tale metodo si presenta notevolmente laborioso, ma avendo a disposizione tecniche di calcolo automatizzato è stato possibile superare tale ostacolo con facilità notevole.

Poichè la stella in esame presenta un tipo spettrale A5, è stato assunto per il coefficiente di oscuramento al bordo il valore di 0.62 per entrambe le componenti, almeno in prima approssimazione. Supponendo che l'oscuramento al bordo obbedisse alla ben nota legge lineare:

$$J(\gamma) = J(0) (1 - x + x \cos \gamma) \quad (6)$$

dove $J(\gamma)$ rappresenta l'intensità di luminosità di un punto del disco stellare della stella eclissata distante angularmente γ dal centro del disco stesso ed x è il coefficiente di oscuramento al bordo dipendente dalla lunghezza d'onda in cui viene osservata la stella e dal suo tipo spettrale, si è proceduto alla determinazione degli elementi cercati.

Il metodo di Kopal utilizzato in questo caso richiede la soluzione di un sistema di equazioni normali del tipo:

$$\sqrt{w_i} (p_i^2 - p_0^2) C_1 + 2\sqrt{w_i} (p_i - p_0) C_2 = \sqrt{w_i} \sin^2 \vartheta_i \quad (7)$$

$p_i = p(\alpha, k) \quad i = 1, 2, \dots, n$

nelle quali $\sqrt{w_i}$ rappresentano i pesi dei vari punti normali della curva di luce, ognuno dei quali è stato utilizzato per costruire una equazione normale e le costanti C_1, C_2 hanno il significato qui indicato:

$$C_1 = r_1^2 \cos^2 i$$

$$C_2 = r_1 r_2 \cos^2 i \quad (8)$$

dove ϑ_i è l'angolo di fase rettificato relativo ad ogni punto normale utilizzato.

Appare subito chiaramente che il rapporto fra i raggi delle due componenti è dato da:

$$\frac{C_1}{C_2} = k \quad (9)$$

Con il metodo utilizzato si giunge alla soluzione in maniera iterativa quando viene raggiunta la coincidenza entro i limiti imposti dagli errori di osservazione del valore di k ottenuto con le equazioni precedentemente indicate, cioè ottenendolo dalle informazioni relative alla forma della curva di luce durante le discese ai minimi (SHAPE) con quello ottenuto dalle informazioni relative alla profondità dei minimi (DEPTH).

Tali informazioni sono ottenute dal gruppo di equazioni che seguono.

$$\alpha^x(k, \beta) = (1 - \epsilon_p) + \frac{(1 - \epsilon_s)}{k^2 Y(k, \beta)}$$

$${}^h\alpha^x(k, \beta) = (1 - \epsilon_p) \frac{Y(k, \beta)}{Y(k; -1)} + \frac{(1 - \epsilon_s)}{k^2 Y(k; -1)}$$

$$Y(k; -1) = 1 - \mu + 1.5 \mu \Phi(k)$$

$$Y(k, \rho) = \frac{(1 - \mu_a) \alpha^v(k, \rho) + 1.5 \mu_b \Phi(k) \alpha_b^0(k, \rho)}{(1 - \mu_a) \alpha^v(k, \rho) + \mu_a \alpha_a^0(k, \rho)} \quad (10)$$

$$\Phi(k) = \frac{4}{3\pi k^2} \left\{ \arcsin \sqrt{k} + \frac{1}{3} (4k - 3)(2k + 1) \sqrt{k(1-k)} \right\}$$

$$\mu_a = \frac{2x_a}{3 - x_a} \quad \mu_b = \frac{2x_b}{3 - x_b}$$

Iniziando con un valore preliminare di k (in questo caso è stato assunto k=1) si sono ottenuti i vari valori di k dalla soluzione con i minimi quadrati di un sistema di 32 equazioni del tipo della (7) in cui i vari pesi avevano il seguente significato:

$$\sqrt{w_i} = \frac{1 - \epsilon_i}{2 \alpha_0 C_2 (1 + k \rho_i) \frac{\partial \rho}{\partial \alpha}} \quad (11)$$

e altri valori per il rapporto fra i raggi ottenuti dalle (10). Per il valore di x assunto e assumendo valida l'ipotesi di minimo principale dovuto ad un transito della stella più luminosa su quella di minor splendore (l'ipotesi contraria era stata anche essa esaminata ma con la prima si erano ottenuti risultati di gran lunga più soddisfacenti e concordanti con le osservazioni) si è ottenuta la coppia di elementi k e α_0 indicata qui di seguito. (Da tener presente che α_0 rappresenta il valore dell'area massima occultata ed espressa in rapporto all'area proiettata della stella più piccola).

$${}^x\alpha_0^h = .8705 \quad k = .7580$$

A questo punto utilizzando i metodi indicati dal Kopal nella sua monografia [1] sono stati corretti i valori della luminosità al massimo e di quelle registrate ai due minimi rianalizzando quindi la curva di luce con i metodi descritti fino ad ottenere la soluzione definitiva seguente:

$${}^x\alpha_0^h = .877 \quad {}^\circ\alpha_0^{\circ} = .879 \quad k = .7595 \pm .0077$$

Con essi sono stati successivamente ricavati tutti gli altri elementi richiesti.

La seconda soluzione è stata ottenuta utilizzando un metodo iterativo di tipo diretto.

Dopo aver assunto che la lunghezza d'onda equivalente in cui era stata osservata la stella fosse $\lambda = 5300 \text{ \AA}$ (osservazione visuale) si è proceduto ad analizzare separatamente le curve di luce relative ai

due minimi. Gli elementi sono stati ricavati utilizzando il computer TI DX980 B facendo variare il valore del rapporto dei raggi k partendo da un valore preliminare $k = 1$, e il valore del coefficiente di oscuramento al bordo x, ricavando di volta in volta la curva teorica relativa a quel minimo e calcolando la somma dei quadrati degli scarti in fase angolare di ogni punto normale teorico calcolato dal suo corrispondente osservato.

In tal modo viene costruita la funzione $S(\alpha, k, x)$ relativa a ciascun minimo esaminato.

Tale funzione presenterà la forma:

$$S(\alpha, k, x) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sin^2 \vartheta_{obs} - \sin^2 \vartheta_{calc} \right)_i^2 \quad (12) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Essa, geometricamente, avrà la forma, approssimativamente di un paraboloide; tramite un processo di Best-Fit ne è stato individuato il minimo le cui coordinate in un sistema di assi X, Y, Z tale che:

$$X = k \quad Y = x \quad Z = S(\alpha, k, x)$$

fornisce i migliori valori di α_0 , k e x che soddisfano alle osservazioni utilizzate.

La tabella V fornisce i valori dei tre elementi ottenuti unitamente ai loro errori probabili e al numero di iterazioni effettuate dalla macchina.

Il lavoro è stato ripetuto per entrambe le ipotesi che potevano essere assunte e cioè che il minimo principale fosse dovuto ad un transito o ad una occultazione della stella principale scegliendo quella caratterizzata da un valore della funzione $S(\alpha, k, x)$ relativa al minimo in esame minore. (La tabella riporta i dati relativi a quella).

Tabella V

minimo analizz.	ipotesi ass.	α_0	k	$x_{a/b}$	$S(\alpha, k, x) \cdot 10^5$
primario	transito	.8759	.7567	.62	21.514
				+ 58	+ 3
secondario	occultazione	.8784	.7549	.603	24.976
				+ 82	+ 91
iterazioni effettuate:		7119	nell'analisi del minimo I		
			7518	nell'analisi del minimo II	

Combinando i risultati ottenuti con i due metodi è stato possibile ricavare dei valori combinati delle quantità cercate a cui applica-

re il metodo delle correzioni differenziali per ottenere una versione definitiva degli elementi orbitali del sistema binario in esame. A tale scopo è stato utilizzato il metodo suggerito da Irwin (1947). (9).

Infatti le differenze in luminosità tra la curva teorica e quella osservata possono venire espresse come segue:

$$\Delta l_{(o-c)} = -x_0^{tr} \Delta L_2 - L_2 \left\{ \frac{\partial x_0^{tr}}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial x_0^{tr}}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial x_0^{tr}}{\partial (\cos^2 i)} \Delta (\cos^2 i) + \frac{\partial x_0^{tr}}{\partial x_1} \Delta x_1 \right\} \quad (13)$$

nel caso del minimo principale e:

$$\Delta l_{(o-c)} = -x_0^{oc} \Delta L_1 - L_1 \left\{ \frac{\partial x_0^{oc}}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial x_0^{oc}}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial x_0^{oc}}{\partial (\cos^2 i)} \Delta (\cos^2 i) + \frac{\partial x_0^{oc}}{\partial x_1} \Delta x_1 \right\} \quad (14)$$

nel caso del minimo secondario; di conseguenza è stato impostato un sistema di equazioni lineari del tipo delle (13) e (14), una per ogni punto normale presente nella curva di luce.

La sua soluzione, ottenuta tramite il calcolatore precedentemente indicato utilizzando il metodo dei minimi quadrati, ha fornito i valori delle correzioni da apportare agli elementi in maniera da renderli definitivi.

Gli elementi definitivi ottenuti sono i seguenti:

$x_0^{tr} = .877$	$L_1 = .6647 \pm .0013$
$x_0^{oc} = .879$	$L_2 = .3352 \pm .0019$
$K = .7595 \pm .0077$	$x_1 = .608 \pm .099$
$r_1 = .3982 \pm .0024$	$x_2 = .623 \pm .041$
$r_2 = .3025 \pm .0013$	$\frac{J_2}{J_1} = .9357 \pm .044$
$ \dot{l} = 79^\circ.384 \pm 0^\circ.203$	J_1

Gli elementi riportati sono rispettivamente: α_0 = area occultata durante la fase massima dell'eclisse ed espressa in unità di aree della stella più piccola; K è il rapporto dei raggi; r_1 , r_2 sono i raggi delle due componenti; $|\dot{l}|$ rappresenta l'inclinazione orbitale; L_1 , L_2 sono le luminosità frazionali delle due stelle componenti il sistema; x_1 , x_2 sono gli oscuramenti ai bordi e J_2/J_1 è il rapporto fra le luminosità superficiali; i valori di r sono espressi in unità di semiasse dell'orbita.

b) Caso di eclisse totale

Facendo l'ipotesi che l'eclisse della stella in esame presenti una fase di stabilità ai minimi si è proceduto alla rideterminazione degli elementi orbitali.

Per tale analisi è stato utilizzato il metodo di Kopal in quanto permette una ottima determinazione anche della fase angolare tipica della tangenza interna dei due dischi stellari. Sempre nell'ipotesi che si sia verificata la (6), l'equazione base del metodo ora diventa:

$$\sqrt{w_i} (p_i^2 - 1) C_1 + 2 \sqrt{w_i} (p_i + 1) C_2 + C_3 = \sqrt{w_i} \sin^2 \theta_i \quad (15)$$

dove C_3 rappresenta il \sin^2 dell'angolo di fase alla tangenza interna.

Tramite il metodo utilizzato sono state prese in esame entrambe le ipotesi relative ai due minimi, come nel caso precedente ottenendo la miglior soluzione per il minimo principale dovuto anche questa volta ad un transito.

Dopo la correzione degli elementi ottenuti tramite l'applicazione delle correzioni differenziali ottenute col metodo di Irwin, precedentemente spiegato, sono risultati i seguenti elementi:

$x_0^{tr} = x_0^{oc} = 1.0$	$ \dot{l} = 88^\circ.131 \pm 0^\circ.292$
$k = .6856 \pm .009$	$L_1 = .6839 \pm .0012$
$r_1 = .3639 \pm .0031$	$L_2 = .3161 \pm .0016$
$r_2 = .2495 \pm .0031$	$\frac{J_2}{J_1} = .9833 \pm .046$
$x_1 = .62 \pm .04$	J_1
$x_2 = .62 \pm .05$	

Come è possibile notare gli elementi ottenuti esaminando le due ipotesi sono molto simili fra di loro e questo ci permette di farci un quadro abbastanza definito della struttura di NN Cephei.

Dallo studio della curva di luce nelle fasi di "fuori eclisse" abbiamo visto in precedenza che la forma leggermente arcuata di essa indicava abbastanza chiaramente che le stelle componenti non sono caratterizzate da una forma perfettamente sferica, ma presentavano una forma ellissoidica. Tenendo conto di questo fatto sono stati derivati i valori dei semiassi degli ellissoidi stellari.

Tali valori sono:

Caso di ecl. Parziale

$a_1 = .4179 \pm .0025$	$a_2 = .3175 \pm .0036$
$b_1 = .4072 \pm .0025$	$b_2 = .3093 \pm .0031$
$c_1 = .3857 \pm .0024$	$c_2 = .2819 \pm .0030$

Caso di ecl. Totale

$a_1 = .3819 \pm .0032$	$a_2 = .2619 \pm .0040$
-------------------------	-------------------------

$$b_1 = .3721 \pm .0032$$

$$b_2 = .2551 \pm .0042$$

$$c_1 = .3391 \pm .0031$$

$$c_2 = .2325 \pm .0040$$

Dallo stesso studio era risultato anche uno sfasamento del minimo secondario dalla fase $\varphi = .5$, inoltre le durate dei minimi si presentavano differenti, anche se le differenze non erano molto grandi, si è provveduto a determinare la eccentricità dell'orbita e la longitudine del nodo ascendente ω .

I valori delle due quantità cercate sono risultati essere:

$$e = .0245 \pm .0043$$

$$\omega = 71^\circ.339 \pm 8^\circ.421$$

F) Controllo degli elementi

A questo punto utilizzando gli elementi ottenuti sono state ricalcolate le due curve teoriche relative ad entrambi i minimi nel caso di tutte le ipotesi assunte: eclisse totale ed eclisse parziale. Tali curve sono mostrate in figura 6 dove i punti indicano le osservazioni usate per il presente studio e riportate per confronto, le curve a tratto continuo sono quelle teoriche ottenute dagli elementi orbitali.

Quella a tratto grosso si riferisce al caso di eclisse parziale e quella a tratto fine si riferisce al caso di eclisse totale. Osservando le due curve si comprende che gli elementi determinati sono abbastanza attendibili in quanto si nota un ottimo accordo tra le osservazioni e quanto suggerito successivamente dalla teoria. Qualche problema viene a sussistere nelle zone della curva in vicinanza della tangenza esterna dei dischi stellari, ma ciò è probabilmente dovuto alla originaria dispersione delle misure che in tali zone era notevolmente alta.

G) Classificazione

Dall'analisi delle osservazioni di NN Cep è stato possibile ricavare delle informazioni sugli elementi orbitali di questo sistema binario sia nel caso che l'eclisse sia dovuta ad una occultazione parziale sia nel caso di eclisse totale.

In questo lavoro si tenterà di stabilire con certezza la classe di appartenenza di questo sistema e di fare delle ipotesi sulle sue effettive dimensioni e sulla sua distanza da noi.

La curva di luce osservata aveva permesso di accertare che NN Cep non apparteneva al tipo EW, però non era stato possibile accertare se tale sistema fosse di tipo EA o EB.

Infatti la curva in esame presentava le caratteristiche tipiche di entrambe le categorie, ma nulla di sicuro poteva essere stabilito a priori.

Dalla analisi della curva di luce è stato possibile risalire agli elementi orbitali del sistema e un successivo passo poteva essere quello di utilizzare questi per una sua catalogazione.

Poiché la catalogazione in EA, EB, EW è solamente qualitativa, essa

non pone limiti precisi fra una classe e l'altra.

In conseguenza di questo fatto si è ritenuto opportuno ricorrere alla classificazione introdotta da Kopal, cioè quella che divide i sistemi binari in D, SD, C.

Tale catalogazione è di tipo quantitativo e tiene conto del fatto che una delle due componenti il sistema, o entrambe, riempiano i loro lobi di Roche.

Si verificherà quindi che nei sistemi "staccati" (D) nessuna delle due componenti riempie il proprio lobo di Roche, mentre nei sistemi "semistaccati" (SD) una delle due riempie il proprio lobo e nei sistemi a "contatto" (C) entrambi i lobi sono occupati dalle due stelle componenti.

La superficie equipotenziale critica, corrispondente al lobo di Roche, è identificata mediante un parametro tipico: C_0 , mentre per ogni altro valore di C si identificano delle superfici equipotenziali che non sono di particolare importanza come quella critica.

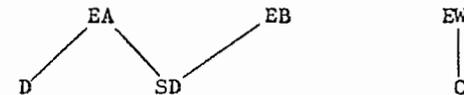
Poiché la definizione di superficie equipotenziale è: il luogo dei punti dello spazio dove il potenziale totale risultante così definito:

$$\Omega = G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) + \frac{\omega^2 r_a^2}{2} \quad (16)$$

è costante, si verificherà che per punti molto prossimi ad una delle due stelle tali superfici saranno molto prossime a sfere, man mano ci si allontana, tali superfici assumeranno delle configurazioni ovali fino a che i valori di C minori di C_0 esse abbracceranno entrambe le stelle componenti il sistema.

La superficie critica identificata con C_0 presenta un punto di contatto: il punto lagrangiano L_1 dove solamente attraverso di esso si può verificare uno scambio di massa tra le due componenti (escluso il caso D).

La corrispondenza fra la classificazione E e quella di Kopal è la seguente:



H) Analisi dei dati

Dall'analisi della curva di luce abbiamo escluso l'appartenenza al tipo EW. Tale fatto era di estrema evidenza per cui su di esso non sussistono dubbi.

Prendiamo in esame separatamente le due stelle componenti il sistema in esame; esse si troveranno in equilibrio fra di loro, almeno entro certi limiti.

La conseguenza di questo fatto è che ognuna delle due avrà la forma della superficie equipotenziale che la contiene.

Ciascuna superficie sarà identificata con un particolare valore di

C_0 tipico del rapporto di massa del sistema; di conseguenza avremo:

- A) $C_1 > C_0$ $C_2 > C_0$ il sistema è di tipo D
- B) $C_1 > C_0$ $C_2 = C_0$ il sistema è di tipo SD
- C) $C_1 = C_0$ $C_2 = C_0$ il sistema è di tipo C

Naturalmente tali condizioni devono essere verificate nei limiti de gli errori di osservazione.

L'equazione che ci permette di ricavare C_1 e C_2 è la seguente:

$$C_J = \frac{2(1 - \mu_J)}{r_J} + \frac{2\mu_J}{\sqrt{1 + r_J^2}} + r_J^2 + \mu_J^2 \quad (17)$$

dove:

$$\mu_J = \frac{m_{(j-1)}}{m_1 + m_2} \quad J = 1, 2 \quad (18)$$

r_J rappresenta il raggio frazionale determinato dall'analisi della curva di luce. m_1 e m_2 sono le masse delle due componenti. La sola analisi della curva di luce non ci permette di determinare il valore delle masse, ma il parametro μ_J dipende dal rapporto di massa che è determinabile.

Poichè il sistema non è di tipo EW si verificherà che $C_1 = C_2$ da considerazioni teoriche e di conseguenza ciò equivale a mettere in relazione il rapporto fra i raggi k determinato per via fotometrica con il rapporto di massa q così definito:

$$q = \frac{m_2}{m_1} \quad (19)$$

infatti si verificherà che:

$$q = \frac{\omega_2}{\omega_1} = K \left\{ \frac{2 - 3r_1 + r_1^3 - \dots}{2 - 3r_2 + r_2^3 - \dots} \right\} \quad (20)$$

escludendo i termini di terzo ordine che sono inferiori agli errori di osservazione.

Le equazioni (17), (18), (20) ci permettono di determinare i valori di C_1 e C_2 e i loro errori medi.

Il parametro C_0 è più difficile da determinare in quanto deriva da considerazioni strettamente teoriche che richiedono calcoli molto laboriosi, però la sua determinazione è facilitata dalla disponibilità di una tabella riportata da Kopal in cui C_0 è tabulato in funzione di q .

Nel nostro caso il suo valore è stato ottenuto interpolando parabolicamente fra i vari tabulati e il suo errore medio tiene conto del

le incertezze sul rapporto di massa utilizzato.

Il processo fin qui descritto è stato applicato separatamente ai dati ottenuti nelle ipotesi di eclisse parziale e totale ottenendo i valori indicati nella tabella seguente:

	<u>eclisse parziale</u>	<u>eclisse totale</u>
q	.58 ± .02	.52 ± .04
C_1	4.15 ± .14	4.51 ± .25
C_2	4.14 ± .16	4.51 ± .35
C_0	3.967 ± .0016	3.948 ± .0003

I valori di C_1 ottenuti confermano che $C_2 \cong C_1$, di conseguenza l'uso della (17) si rivela corretto in fase di determinazione del rapporto di massa.

I) Conclusioni

Dallo studio sin qui presentato si è cercato di ricavare il maggior numero possibile di notizie dalla curva di luce di NN Cephei al fine di cercare di avere un quadro il più approssimato possibile di questo interessante sistema binario.

Già lo scorso anno si era tentata la soluzione delle curve di luce di questa interessante stella e i risultati allora ottenuti sono stati pubblicati sulla NC 176 del GEOS.

Gli elementi ottenuti allora si discostano sensibilmente, per lo meno alcuni di essi, da quelli ottenuti presentemente.

Il motivo di questo fatto va ricercato nello scarso numero di misure allora disponibili che non ha permesso una elaborazione rigorosa.

I risultati ottenuti mostrano in entrambi i casi (eclisse parziale ed eclisse totale) i valori dei parametri C sono sensibilmente maggiori del valore di C_0 tipico del rapporto di massa considerato, di conseguenza diviene valida e verificata l'ipotesi dell'appartenenza del sistema NN Cep alla classe D, cioè si verifica che entrambe le componenti del sistema sono ancora racchiuse nelle loro superfici equipotenziali non critiche.

Questo fatto ci autorizza a considerare il sistema in esame come appartenente al tipo EA.

Facendo ora alcune considerazioni di carattere statistico osserviamo che in genere i sistemi binari di tipo D presentano il minimo principale, cioè quello di maggior profondità, dovuto ad un transito della stella più ridotta di fronte a quella di diametro maggiore.

Tale fatto ci indica che la componente di diametro maggiore è anche la più luminosa.

Generalmente tale fatto ci indica anche che la componente di diametro maggiore è anche la più massiva e dovrebbe possedere anche uno spettro meno avanzato.

Altra caratteristica di questi sistemi è che essi presentano spesso

orbite con apprezzabile eccentricità è il periodo è spesso notevolmente stabile.

In effetti si nota che NN Cep risponde a tutte le caratteristiche determinabili dall'analisi della curva di luce tipica della categoria D.

Un'altra interessante conseguenza è che i sistemi di tipo D sono formati quasi con certezza da stelle appartenenti alla sequenza principale.

Questo fatto si dimostrerà utile per la successiva analisi dei dati disponibili nel tentativo di determinare le dimensioni e la distanza di tale sistema binario.

A. GASPANI

Bibliografia

- 1) Z. Kopal: "CLOSE BINARY SYSTEM" CH. & HALL. 1959
- 2) A.H. Batten: "BINARY AND MULTIPLE SYSTEM OF STARS" PERG. PRESS
- 3) H.N. Russell, J.E. Merrill: Contr. Princ. Univ. N°26 1952
- 4) I. Jurkevich: Vistas in Astronomy vol. 12 1963
- 5) R.E. Wilson : " " " " " "
- 6) G. Armellini: "I FONDAMENTI SCIENTIFICI DELL'ASTROFISICA"
- 7) M.G. Fracastoro: "Corso di Astronomia"
- 8) H. Minti: Studii si Carcetari de Astr. 15,61 1970
- 9) J.B. Irwin: ApJ 106,380, 1947
- 10) B.V. Kukarkin: G.C.V.S. 1969 suppl. 1974
- 11) V.M. Tabachnik: Soviet Astronomy AJ 12,830, 1969
- 12) R. Rolland: IBVS 1231
- 13) " " : GEOS NC 142
- 14) A. Figer: GEOS NC 159
- 15) A. Gaspani: GEOS NC 176
- 16) " " : GEOS FT 08
- 17) " " : C.A.B. Pubb. 1, 1977
- 18) B. Demidovitch, I. Maron: "Elements de calcul numerique" EM.
- 19) A.G. Worthing J. Geffner: "ELABORAZIONE DEI DATI SPERIMENTALI"
- 20) R.F. Garrison: AJ 75, 1001, 1970

